

Методические указания к расчету балки, изготовленной из хрупкого материала, неодинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию. Пример расчета.

Задача № 2. На балку, изготовленную из материала, неодинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию ($R_{сж} > R_{раст}$), действует нагрузка в виде силы F и пары сил M . Модель балки (расчетная схема) при допущениях, принятых в сопротивлении материалов, изображена на рис. 1.

При расчете принять $R_{сж} = 140$ МПа, $R_{раст} = 50$ МПа. Требуется:

1. Изобразить расчетную схему балки согласно варианту задания, указать на схеме численные значения сил, линейные размеры (рис. 1, а).

2. Определить методами сопротивления материалов внутренние усилия и построить эпюры. Для расчета требуется построить эпюру изгибающего момента M_z . Для заданной схемы построим эту эпюру, используя правила построения эпюры для типовых балок ([1] с. 30). Эпюра показана на рис. 1, б. Эпюра построена на растянутых волокнах, на правом участке (консольная часть) растянутые волокна находятся вверху, на левом участке AB изгибающий момент изменяет знак, в сечении A растянуты нижние волокна, в сечении D знак изгибающего момента изменяется. Опасным сечением при изгибе является то сечение балки, в котором возникает наибольший изгибающий момент. Для заданной балки опасное сечение – сечение B , наибольший изгибающий момент $|M_z|_{max} = 40$ кНм.

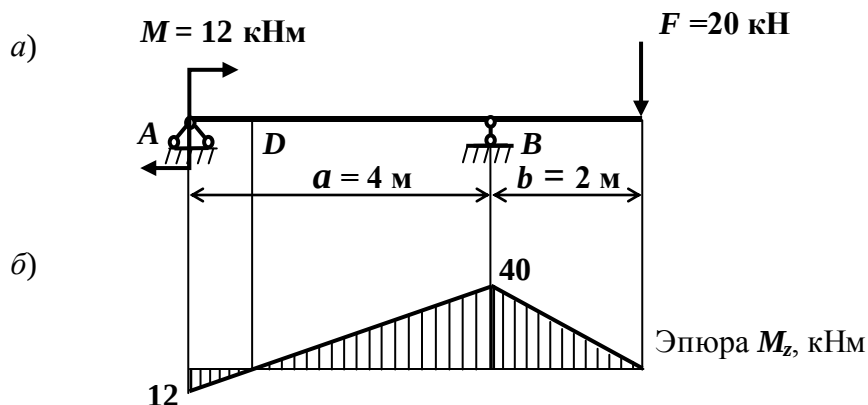


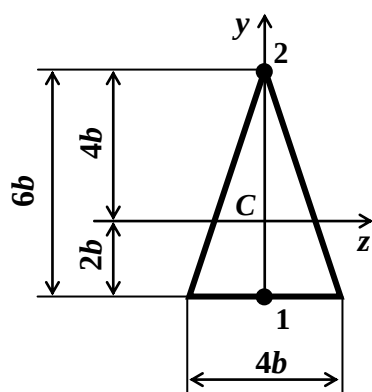
Рис. 1

3. Составить прочностную модель (условие прочности) при изгибе по нормальным напряжениям. Для балки, изготовленной из материала, неодинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию ($R_{сж} > R_{раст}$), прочностная модель представляется в виде двух условий прочности:

- при растяжении $\sigma_{max}^p = \frac{|M_z|_{max}}{I_z} y_{max}^p \leq R_{раст}; \quad (1)$

- при сжатии $|\sigma^c|_{max} = \frac{|M_z|_{max}}{I_z} y_{max}^c \leq R_{сж}. \quad (2)$

Здесь $|M_z|_{max}$ - наибольший по величине изгибающий момент в опасном сечении балки; I_z - осевой момент инерции поперечного сечения балки относительно поперечной оси z ; y_{max}^p, y_{max}^c - координаты опасных точек в поперечном сечении балки, наиболее удаленных от оси z (нулевой линии) в растянутой и сжатой части поперечного сечения соответственно. Для определения осевого момента инерции и указанных координат опасных точек надо найти геометрические характеристики заданного поперечного сечения ([1] с.108). Поперечное сечение заданной формы (в виде равнобедренного треугольника) изображаем в относительном масштабе (рис. 2). Для треугольного сечения положение центра тяжести, осевые моменты инерции находим, используя табличные данные ([1], с. 114): высота треугольника $h_T = 6b$, основание треугольника $b_T = 4b$, тогда



$$I_z = \frac{b_T h_T^3}{36} = \frac{4b(6b)^3}{36} = 24b^4$$

Центр тяжести треугольника – точка C , главные центральные оси – оси zCy .

Рис. 2

Ось z является нулевой линией, которая делит сечение на сжатую и растянутую часть. Точки, наиболее удаленные от оси z – опасные точки, в них возникают наибольшие напряжения. Для заданного сечения это точки, лежащие на основании треугольника (точка 1) и вершина треугольника – точка 2 (на рис. 2 точки показаны в увеличенном виде). Для сечений других форм геометрические характеристики определяют методами, приведенными в учебниках ([1] с. 108, [2] с. 21).

Заданная балка изготовлена из материала, сопротивление (прочность) которого при растяжении меньше, чем при сжатии. Рациональным положением является положение сечения, при котором растяжение возникает в точках, находящихся ближе к оси z , так чтобы выполнялось соотношение $\sigma_{max}^p < |\sigma^c|_{max}$. Для треугольника рационально положение сечения, при котором точка 1 и все точки основания треугольника расположены в растянутой части сечения. При этом по другую сторону от оси z возникает сжатие ([2], с. 281).

Расчет на прочность надо проводить с учетом условий прочности (1) и (2). Размеры поперечного сечения и его положение относительно нагрузки необходимо выбрать так, чтобы выполнялись условия прочности во всех сечениях балки и при этом размеры сечения должны быть минимальными, что обеспечивает экономию материала. При расчете необходимо учитывать соотношение между координатами опасных точек y_{max}^p, y_{max}^c и расчетными сопротивлениями R_p и $R_{сж}$, что позволяет сократить объем вычислений. Рассмотрим следующие случаи этих соотношений:

а) $\frac{y_{max}^c}{y_{max}^p} < \frac{R_{сж}}{R_{раст}}$ - расчет ведем по условию прочности (1), условие (2) выполняется;

б) $\frac{y_{max}^c}{y_{max}^p} > \frac{R_{сж}}{R_{раст}}$ - расчет ведем по условию прочности (2), условие (1) выполняется;

в) $\frac{y_{max}^c}{y_{max}^p} = \frac{R_{сж}}{R_{раст}}$ - расчет ведем по любому из условий прочности (1) или (2).

Вычислим эти соотношения для заданного сечения:

$$\frac{y_{max}^c}{y_{max}^p} = \frac{4b}{2b} = 2; \quad \frac{R_{сж}}{R_{раст}} = \frac{140}{50} = 2,8.$$

Соотношения соответствуют случаю а), $\frac{y_{max}^c}{y_{max}^p} < \frac{R_{сж}}{R_{раст}}, 2 < 2,8$.

Расчет ведем по условию прочности (1)

$$\sigma_{max}^p = \frac{|M_z|_{max}}{I_z} y_{max}^p \leq R_{раст}.$$

В этом случае согласно знаку изгибающего момента в опасном сечении балки В рациональное положение сечения такое, при котором точка 1 находится вверху в растянутой части сечения (рис. 3).

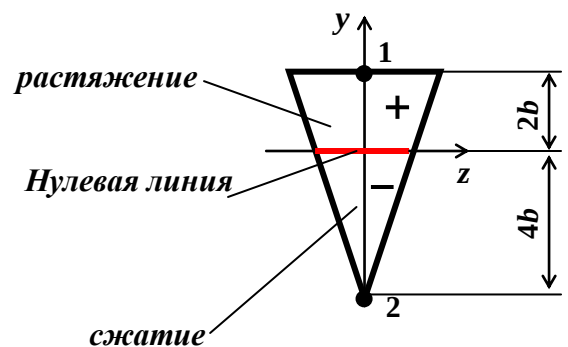


Рис. 3

Подставим в условие прочности значения входящих в него величин и определим искомый размер b :

$$\sigma_{max}^p = \frac{|M_z|_{max}}{24b^4} 2b \leq R_{раст}, \quad \text{отсюда}$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{2|M_z|_{max}}{24R_{раст}}} = \sqrt[3]{\frac{40 \cdot 10^3}{12 \cdot 50 \cdot 10^6}} = 4,05 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 4,05 \text{ см.}$$

Определим при найденном размере b напряжения в точках 1 и 2 сечения B :

$$\sigma_{max}^p = \sigma_1 = \frac{|M_z|_{max}}{24b^4} 2b = \frac{40 \cdot 10^3}{24(4,05)^4 10^{-8}} 2 \cdot 4,05 \cdot 10^{-2} = 50,18 \cdot 10^6 \text{ Па} = 50,18 \text{ МПа.}$$

Небольшое отклонение наибольшего напряжения в точке 1 (0,36%) от расчетного сопротивления при растяжении зависит от округления результатов вычислений размера b .

Найдем наибольшее напряжение сжатия в точке 2 опасного сечения B :

$$|\sigma^c|_{max} = \frac{|M_z|_{max}}{I_z} y_{max}^c = \frac{|M_z|_{max}}{24b^4} 4b = \frac{40 \cdot 10^3}{24(4,05)^4 10^{-8}} 4 \cdot 4,05 \cdot 10^{-2} = 100,36 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100,36 \text{ МПа} < R_{сж} = 120 \text{ МПа}$$

- условие прочности (2) выполнено при найденном размере $b=4,05$ см.

Обратим внимание на соотношение между напряжениями в точках 1 и 2:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{y_{max}^c}{y_{max}^p} = \frac{4b}{2b} = 2, \quad \sigma_2 = 2\sigma_1.$$

5. Проверим выполнение условия прочности в сечении A , в котором изгибающий момент имеет другой знак, т. е. в положении сечения, показанного на рис. 3 в точке 1 возникает сжатие, а в точке 2 – растяжение. Напряжение в точке 2:

$$\sigma_{max}^p = \sigma_2 = \frac{|M_z|_A}{24b^4} 4b = \frac{12 \cdot 10^3}{24(4,05)^4 10^{-8}} 4 \cdot 4,05 \cdot 10^{-2} = 30,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 30,1 \text{ МПа} < R_{раст} = 50 \text{ МПа.}$$

Условие прочности (1) выполнено.

Напряжение сжатия в точке 1 в сечении A :

$|\sigma^c|_{max} = 2\sigma_{max}^p = 2 \cdot 30,5 = 61 \text{ МПа}$ - условие прочности (2) в сечении A также выполнено. Таким образом, условия прочности (1) и (2) выполнены при найденном размере b в обоих сечениях A и B .

Построим эпюру напряжений в опасном сечении B (рис. 4).

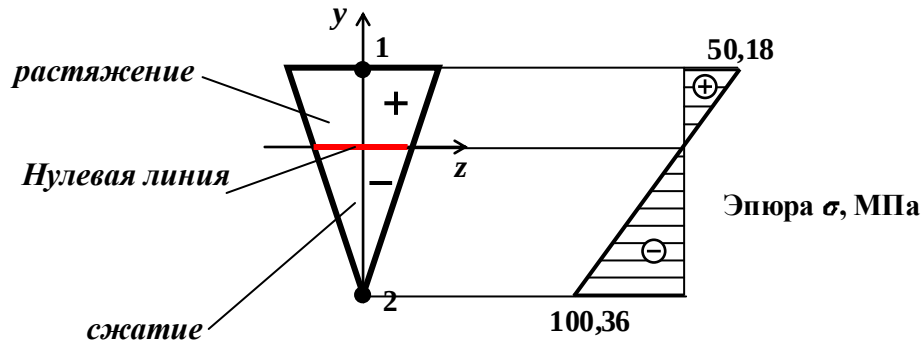


Рис. 4

Определим размеры сечения:

Высота $h_T = 6b = 6 \cdot 4,05 = 24,3$ см;

Основание $b_T = 4b = 4 \cdot 4,05 = 16,2$ см.

Рациональное положение сечения показано на рис. 3:



При невыполнении условия прочности во втором сечении (в нашем случае сечение A), надо определить искомый размер b из этого условия прочности и проверить выполнение условий прочности в других сечениях аналогично проверке, приведенной выше. Если изгибающий момент не меняет знак вдоль всей длины балки (эпюра находится по одну сторону от базовой линии), то достаточно рассмотреть условия прочности для одного опасного сечения.

Литература

1. Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. – 2-е изд. Испр. – М.: Высш. шк., 2001. – 560 с.: ил.
2. Сопротивление материалов/ Под ред. акад. АН УССР Писаренко Г. С. – 5-ое изд., перераб. И доп. – К.: Вища шк., 1986. – 775с.